

复杂载荷下偏心穿透裂纹应力强度因子的计算方法

贾旭^{1,2}, 胡绪腾¹, 宋迎东^{1,2}

- (1. 南京航空航天大学 能源与动力学院 江苏省航空动力系统重点实验室, 南京 210016;
2. 南京航空航天大学 机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016)

摘 要: 提出了三维矩形平板内偏心穿透裂纹承受复杂非线性载荷下, 仅含有3个系数的通用权函数。采用有限元法获得了三维矩形平板裂纹体模型下的3组参考应力强度因子, 结合二元拉格朗日插值法获得了通用权函数系数。进行了自洽性验证以及裂纹面上承受简单3次、5次、7次、复杂幂函数应力分布和残余应力分布下通用权函数的验证。结果表明, 通用权函数的自洽性误差在0.9%以内; 裂纹面上承受复杂幂函数应力分布时, 通用权函数法的误差在4.5%以内; 裂纹面承受残余应力分布载荷时, 通用权函数法的误差在8.5%以内。说明所提出的通用权函数具有较高的计算精度, 可以满足工程中高效、准确地计算偏心穿透裂纹承受任意复杂非线性载荷下的应力强度因子需求。

关键词: 应力强度因子; 偏心穿透裂纹; 通用权函数; 非线性应力场; 有限元法

中图分类号: V231.96; O346.1

文献标志码: A

Calculation method of stress intensity factors of eccentric through cracks subjected to complex loading

JIA Xu^{1,2}, HU Xuteng¹, SONG Yingdong^{1,2}

- (1. Jiangsu Province Key Laboratory of Aerospace Power System, College of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;
2. State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: General weight functions only containing three coefficients for eccentric through cracks in a 3-D rectangular plate subjected to complex nonlinear loading were proposed. Three sets of reference stress intensity factors of 3-D rectangular cracked plate were obtained by the finite element method, and combining with binary Lagrange interpolation method, the three coefficients of each general weight function were also obtained. Self-consistency of general weight functions was verified and general weight functions were also validation when the crack surface was loaded by simple third-order, fifth-order, seventh-order, complex power law stress distributions and the residual stress distribution were conducted. Results showed that, the self-consistency error of general weight functions was smaller than 0.9%, when the crack surface was loaded by the complex power law stress distribution, error

收稿日期: 2016-11-22

基金项目: 国家自然科学基金(E050401)

作者简介: 贾旭(1989—), 男, 博士生, 研究方向为航空发动机结构完整性与耐久性。E-mail: jia_xu_nuaa@qq.com

引用格式: 贾旭, 胡绪腾, 宋迎东. 复杂载荷下偏心穿透裂纹应力强度因子的计算方法[J]. 航空动力学报, 2018, 33(6): 1464-1474.
JIA Xu, HU Xuteng, SONG Yingdong. Calculation method of stress intensity factors of eccentric through cracks subjected to complex loading[J]. Journal of Aerospace Power, 2018, 33(6): 1464-1474.

of the weight function method was smaller than 4.5%, when the crack surface was loaded by the residual stress distribution, error of the weight function method was smaller than 8.5%. This indicates that the proposed general weight functions has high computing accuracy, which could meet the challenge of calculating stress intensity factors of eccentric through cracks subjected to arbitrary complex nonlinear loading efficiently and correctly in engineering.

Key words: stress intensity factors; eccentric through crack; general weight function; nonlinear stress field; finite element method

航空发动机中诸多构件例如风扇/压气机叶片、轮盘、薄壁构件等,可能由于应力集中、外物损伤、碰摩、漏检的加工缺陷和材料内部缺陷等原因过早地萌生表面裂纹或内部裂纹,并沿构件厚度方向快速扩展形成偏心穿透裂纹,然后经过较长的偏心穿透裂纹扩展阶段直至断裂。对此类构件进行寿命评估时准确高效地计算偏心穿透裂纹的应力强度因子(stress intensity factors, SIFs)是裂纹扩展分析的关键。而现有的应力强度因子手册^[1-2]无法满足目前工程中复杂裂纹体的需求。虽然有限元法(finite element method, FEM)^[3]能够准确计算复杂裂纹结构的应力强度因子,但是有限元法有时却无法feet足工程中计算效率的需求。Bueckner^[4]和 Rice^[5]提出的权函数法是一种可以计算任意复杂应力分布下裂纹体应力强度因子的有效方法。但获取复杂含裂纹结构的权函数几乎是不可能的。为了发展准确高效的应力强度因子计算方法,工程上将复杂的裂纹体结构简化为包含原始裂纹的矩形平板^[6-9],采用叠加原理将实际结构在服役载荷下危险区域无裂纹时沿预期裂纹扩展方向的应力分布施加在矩形裂纹体的裂纹面上,以矩形板裂纹的应力强度因子作为实际结构裂纹应力强度因子的近似值。对矩形平板裂纹体而言,虽然 Wu、Newman 等人^[10-11]通过假设裂纹面张开位移^[12]获得了多种矩形板裂纹体的权函数,但这类权函数形式复杂,操作不便。而由 Glinka 和 Shen^[13]总结权函数的一般特征而提出的通用权函数(general weight function, GWF)只含有 3 个待定系数,被认为是简单、准确和高效的应力强度因子计算方法^[9, 14-16]。通用权函数已经在双边、单边和中心穿透裂纹以及 1/4 椭圆角裂纹、半椭圆表面裂纹和椭圆内部裂纹中得到了广泛的应用^[16-18],为复杂非线性应力场下工程实际结构危险部位裂纹的应力强度因子计算提供了方便。然而对于工程中经常出现的偏心穿透裂纹,目前没有合适的通用权函数。

本文提出了矩形板偏心穿透裂纹的通用权函

数,仍然只含有 3 个待定系数。鉴于偏心穿透裂纹应力强度因子的厚度效应,采用有限元法获得了三维矩形板偏心穿透裂纹面上分别承受均布、线性分布、二次分布应力下应力强度因子作为参考解。为了避免拟合参考应力强度因子表达式带来的误差,采用了二元拉格朗日插值法获得了通用权函数的 3 个待定系数。最后以矩形板裂纹面上承受任意复杂非线性应力、残余应力为例,采用有限元计算结果对本文提出的通用权函数进行了验证。

1 偏心穿透裂纹的通用权函数

偏心穿透裂纹或中心穿透裂纹承受关于裂纹中心非对称载荷时,裂纹两个尖端的应力强度因子是不同的。其中,矩形板内偏心穿透裂纹及其尺寸定义如图 1 所示。矩形板的宽度为 $2W$,长度为 $2H$,厚度为 T 。全局坐标系(global coordinate system) xyz 的原点为矩形板的中心, z 轴沿矩形板厚度方向, x 轴沿矩形板宽度方向, y 轴沿矩形板长度方向。在全局坐标系下,距离原点较远的裂纹尖端为 A 点,其 x 轴位置坐标为 a_A ;距离原点较近的裂纹尖端为 B 点,其 x 轴位置坐标

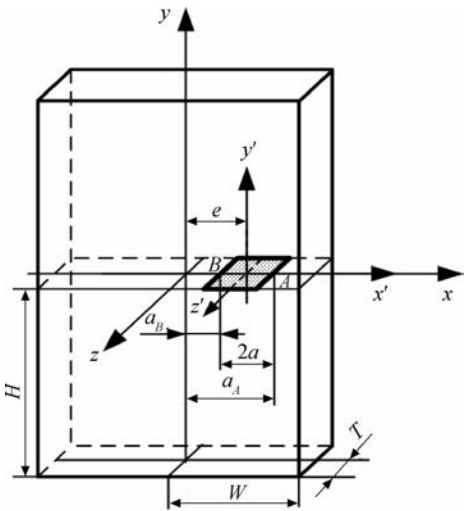


图 1 矩形板偏心穿透裂纹

Fig. 1 Eccentric through crack in rectangular plate

为 a_B 。局部坐标系 (local coordinate system, LCS) $x'y'z'$ 轴分别与全局坐标系平行, 其原点为偏心穿透裂纹的中心。裂纹总长 $2a = a_A - a_B$, 裂纹中心偏离矩形板中心的距离为偏心穿透裂纹的偏心距 e 。本文针对偏心穿透 I 型裂纹, 其通过叠加原理 (如图 2) 产生的裂纹面上应力方向平行于 y 轴, 并沿 x 轴方向呈非线性变化, 沿 z 轴方向呈现均匀分布。叠加原理是用一个具有简单边界条件的裂纹体等效地取代具有复杂边界条件和复杂载荷条件的裂纹体。图 2 中 U 和 P 分别表示位移和力; C_U 和 C_P 分别表示位移的作用边界和力的作用边界; M 和 N 分别为裂纹的两个尖端点; σ 表示裂纹面上的应力分布。

Chen 和 Albrecht^[19] 根据权函数的定义, 在全局坐标系下通过对假设的偏心穿透裂纹面张开位移表达式进行偏微分获得了较为复杂的权函数:

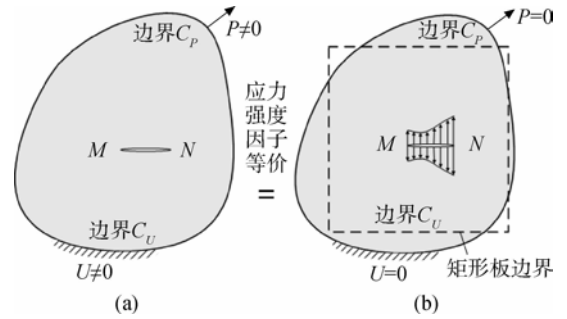


图 2 叠加原理

Fig. 2 Principle of superposition

$$m_A(x, a_A) = \frac{1}{\sqrt{\pi a} f_r^A} \left[\left(\beta_1^A \frac{r_A}{W} + \beta_2^A \frac{r_B}{W} \right) \left(\frac{r_B}{r_A} \right) + \left(\beta_3^A + \beta_4^A \frac{r_A}{W} + \beta_5^A \frac{r_B}{W} \right) \left(\frac{r_A}{W} \cdot \frac{r_B}{W} \right)^{1/2} + \beta_6^A \left(\frac{r_A}{W} \cdot \frac{r_B}{W} \right)^{3/2} \right] \quad (1)$$

$$m_B(x, a_B) = \frac{1}{\sqrt{\pi a} f_r^B} \left[\left(\beta_1^B \frac{r_A}{W} + \beta_2^B \frac{r_B}{W} \right) \left(\frac{r_A}{r_B} \right) + \left(\beta_3^B + \beta_4^B \frac{r_A}{W} + \beta_5^B \frac{r_B}{W} \right) \left(\frac{r_A}{W} \cdot \frac{r_B}{W} \right)^{1/2} + \beta_6^B \left(\frac{r_A}{W} \cdot \frac{r_B}{W} \right)^{3/2} \right] \quad (2)$$

其中 $m_A(x, a_A)$ 和 $m_B(x, a_B)$ 分别为 A 点和 B 点的权函数, 分别包括 6 项系数 β_i^A 和 β_i^B ($i=1 \sim 6$), 由 1 个复杂的参考解表达式获得, 其系数均为裂纹长度和偏心距的函数; $r_A = a_A - x$, $f_r^A = K_r^A / \sqrt{\pi a}$; $r_B = x - a_B$, $f_r^B = K_r^B / \sqrt{\pi a}$; f_r^A, f_r^B 分别为参考应力强度因子的修正因子, K_r^A, K_r^B 为参考应力强度因子; 本文将全局坐标下的式 (1) 和式 (2) 转换为局部坐标系下后得到

$$m^A(x, a) = \frac{1}{\sqrt{\pi(a-x)}} \left[M_1^A \left(1 - \frac{x}{a} \right) \left(1 + \frac{x}{a} \right)^{1/2} + M_2^A \left(1 + \frac{x}{a} \right)^{3/2} + M_3^A \left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 \left(1 + \frac{x}{a} \right)^{1/2} + M_4^A \left(1 - \frac{x}{a} \right)^{3/2} + M_5^A \left(1 - \frac{x}{a} \right) \left(1 + \frac{x}{a} \right)^{3/2} + M_6^A \left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 \left(1 + \frac{x}{a} \right)^{3/2} \right] \quad (3)$$

$$m^B(x, a) = \frac{1}{\sqrt{\pi(a+x)}} \left[M_1^B \left(1 + \frac{x}{a} \right) \left(1 - \frac{x}{a} \right)^{1/2} + M_2^B \left(1 - \frac{x}{a} \right)^{3/2} + M_3^B \left(1 + \frac{x}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{a} \right)^{1/2} + M_4^B \left(1 + \frac{x}{a} \right) \left(1 - \frac{x}{a} \right)^{3/2} + M_5^B \left(1 + \frac{x}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{a} \right)^{3/2} \right] \quad (4)$$

$$K^{A,B} = \int_{-a}^a \sigma(x) m^{A,B}(x, a) dx \quad (5)$$

其中 $K^{A,B}$ 为待求应力强度因子, M_i^A ($i=1 \sim 6$) 和 M_i^B ($i=1 \sim 5$) 分别为局部坐标系下权函数的系数, 均为裂纹长度、偏心距和矩形板尺寸的函数。 $\sigma(x)$ 为任意复杂载荷通过叠加原理得到的假设裂纹体无裂纹时沿原裂纹面上的应力分布。

由 Glinka 和 Shen^[13] 提出的通用权函数具有统一的表达式包括 1 项奇异项和包含 3 项未知系数的非奇异项。

$$m(x, a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi(a-x)}} \left[1 + M_1 \left(1 - \frac{x}{a} \right)^{1/2} + M_2 \left(1 - \frac{x}{a} \right) + M_3 \left(1 - \frac{x}{a} \right)^{3/2} \right] \quad (6)$$

式中 M_1, M_2, M_3 为裂纹体几何特征的函数, 可由 3 个参考应力强度因子获得。虽然通用权函数 (式 (6)) 仅包括 3 个未知系数, 却可以准确地近似多种裂纹体应力强度因子解析解或数值解^[16-18]。式 (3) 和式 (4) 同样包括一项奇异项和非奇异项, 但为了获得系数 M_i^A 和 M_i^B , 工程中无法准确高效地提供 5~6 种参考应力强度因子。因此, 本文选择式 (3) 和式 (4) 的前 3 项作为偏心穿透裂纹的通用权函数, 即

$$m^A(x,a) = \frac{1}{\sqrt{\pi(a-x)}} \left[M_1^A \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{1/2} + M_2^A \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{3/2} + M_3^A \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{1/2} \right]$$

(7)

$$m^B(x,a) = \frac{1}{\sqrt{\pi(a+x)}} \left[M_1^B \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1/2} + M_2^B \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{3/2} + M_3^B \left(1 + \frac{x}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1/2} \right]$$

(8)

2 通用权函数系数

偏心穿透裂纹的通用权函数包含 3 个未知系数 M_i^A 和 M_i^B ($i=1,2,3$),那么需要 3 组参考载荷下的参考应力强度因子 K_{ri}^A 和 K_{ri}^B ($i=1,2,3$)代入式(5)、式(7)、式(8)组成线性方程组。本文选用裂纹面上分别为均布($\sigma_{r0}(x)$)、线性分布($\sigma_{r1}(x)$)和二次分布($\sigma_{r2}(x)$)的应力作为参考载荷,其示意图和参考应力强度因子统一表达式见表 1,其中 $F_{ri}^{A,B}$ ($i=1,2,3$)表示几何修正因子, $\sigma_0=100$ MPa。

表 1 参考载荷及参考应力强度因子
Table 1 Reference loading cases and reference stress intensity factors

参考载荷	示意图	参考应力强度因子
均布分布 全局坐标系: $\sigma_{r0}(x)=\sigma_0$ 局部坐标系: $\sigma_{r0}(x)=\sigma_0$		$K_{r0}^{A,B}=\sigma_0\sqrt{\pi a}F_{r0}^{A,B}$
线性分布 全局坐标系: $\sigma_{r1}=\sigma_0[1-(x/a_A)]$ 局部坐标系: $\sigma_{r1}=\sigma_0(a/a_A)(1-x/a)$		$K_{r1}^{A,B}=\sigma_0\sqrt{\pi a}F_{r1}^{A,B}$
二次分布 全局坐标系: $\sigma_{r2}=\sigma_0(1-x/a_A)^2$ 局部坐标系: $\sigma_{r2}=\sigma_0(a/a_A)^2(1-x/a)^2$		$K_{r2}^{A,B}=\sigma_0\sqrt{\pi a}F_{r2}^{A,B}$

参考载荷的精度直接决定了权函数的计算精度,为了提高偏心穿透裂纹通用权函数的计算精度和简化计算过程,本文进行了两个方面的改进。一方面,采用矩形板裂纹体三维有限元应力强度因子计算结果^[3]作为参考应力强度因子,而非采用二维矩形板裂纹体有限元模型。所建立的 1/2 三维有限元模型如图 3,其中矩形板尺寸为 $H=80$ mm, $W=40$ mm, $T=5$ mm,裂纹尺寸设有算例 $a/(W-e)=0.08,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9$ 和 $e/W=0.0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8$ 。所选材料的基本力学性能为:弹性模量 $E=109$ GPa,泊松比 $\nu=0.34$ 。三维矩形板裂纹体被划分为 4 个区域进行网格划分:首先,裂纹前缘采用五面体奇异单元划分,每个裂纹前缘周围具有 16 个奇异单元。奇异单元尺寸 $L=0.04$ mm,即 L/a 不大于 0.02 可以保证有限元计

算结果的网格无关性。然后,围绕裂纹前缘的两块微小区域分别采用 20 节点等参元划分。最后过渡区域和远离裂纹前缘的区域采用高阶 8 节点

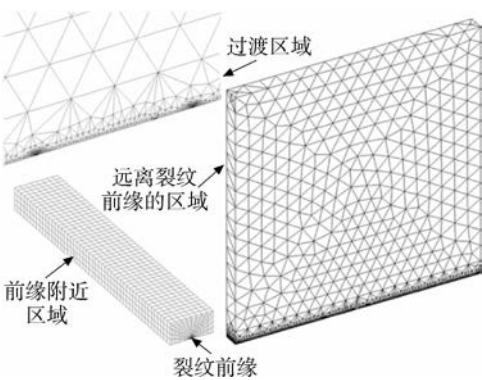


图 3 三维矩形平板偏心穿透裂纹的 1/2 有限元模型
Fig. 3 Half finite element model of an eccentric through crack in a 3-D rectangular plate

四面体单元进行划分。有限元模型的单元总数为 287819。随后本文以 $e/W=0.5, a/(W-e)=0.2$ 为例,对裂纹面承受均布载荷下的三维有限元计算结果和二维平面应变条件下的应力强度因子(K)计算结果进行了对比,如图 4 所示。图中 δ_A 和 δ_B 分别表示裂纹前缘点 A 与裂纹前缘点 B 三维模型计算结果与二维模型计算结果的相对差异。从图 4 可以看出,二维平面应变模型应力强度因子计算结果与三维模型计算结果的相对差异在三维矩形板厚度中间区域最大且保持为一定值,约为 6.5%。三维模型的应力强度因子计算结果沿厚度方向是变化的,但在厚度中间的绝大部分区域的应力强度因子是一样的。因此为了计算实际结构的应力强度因子,本文选用矩形板裂纹体的三维有限元模型在厚度中心($z=0\text{ mm}$)处的应力强度因子计算结果作为偏心穿透裂纹通用权函数的参考应力强度因子。第二方面,抛弃采用拟合公式对参考应力强度因子进行拟合而采用二元拉格朗日插值法(binary Lagrange interpolation method,BLIM),通过插值现有参考数据点而得到任意裂纹长度下的参考应力强度因子。如此,

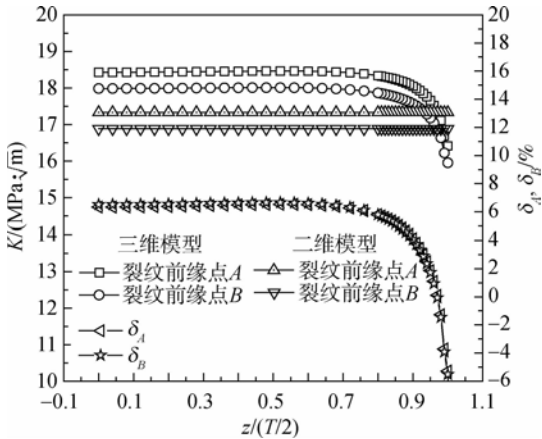


图 4 三维模型和二维模型的应力强度因子
计算结果对比

Fig. 4 Comparison of stress intensity factors calculated result using 3-D models and 2-D models

既可避免寻找合适二元函数又可避免拟合过程引入的不必要误差。

2.1 裂纹前缘点 A 的通用权函数

将表 1 中的三组参考载荷和参考应力强度因子统一表达式和式(7)代入式(5)后,可以得到如下关于 $M_i^A (i=1,2,3)$ 的独立线性方程组:

$$\left\{ \begin{aligned} K_{Ir0}^A &= \sigma_0 \sqrt{\pi a} F_{r0}^A = \int_{-a}^a \frac{\sigma_0}{\sqrt{\pi(a-x)}} \left[M_1^A \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{1/2} + M_2^A \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{3/2} + \right. \\ &\quad \left. M_3^A \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{1/2} \right] dx \\ K_{Ir1}^A &= \sigma_0 \sqrt{\pi a} F_{r1}^A = \int_{-a}^a \frac{\sigma_0(1-x/a)}{\sqrt{\pi(a-x)}} \cdot \frac{a}{a_A} \left[M_1^A \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{1/2} + M_2^A \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{3/2} + \right. \\ &\quad \left. M_3^A \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{1/2} \right] dx \\ K_{Ir2}^A &= \sigma_0 \sqrt{\pi a} F_{r2}^A = \int_{-a}^a \frac{\sigma_0(1-x/a)^2}{\sqrt{\pi(a-x)}} \left(\frac{a}{a_A} \right)^2 \left[M_1^A \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. M_2^A \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{3/2} + M_3^A \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{1/2} \right] dx \end{aligned} \right. \tag{9}$$

积分后得到

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} M_1^A + \frac{3}{2} M_2^A + \frac{1}{2} M_3^A &= F_{r0}^A \\ \frac{a}{a_A} \left(\frac{1}{2} M_1^A + \frac{1}{2} M_2^A + \frac{5}{8} M_3^A \right) &= F_{r1}^A \\ \left(\frac{a}{a_A} \right)^2 \left(\frac{5}{8} M_1^A + \frac{3}{8} M_2^A + \frac{7}{8} M_3^A \right) &= F_{r2}^A \end{aligned} \right. \tag{10}$$

首先采用二元拉格朗日插值法获得 3 组参考载荷下任意裂纹长度 a 与偏心距 e 对应的参考应力强度因子(采用 $F_{ri}^A (i=1,2,3)$ 表示),然后通过式(10)计算得到通用权函数的系数 $M_i^A (i=1,2,3)$,即可得到任意偏心穿透裂纹尺寸下的通用权函数。最后将复杂应力分布 $\sigma(x)$ 和通用权函数代入式(5)进行数值积分便可计算得到任意复杂载荷与任意裂纹尺寸下裂纹前缘点 A 的应力强度因子。

2.2 裂纹前缘点 B 的通用权函数

将表 1 中的 3 组参考载荷和参考应力强度因子统一表达式和式(8)代入式(5)后,可以得到如下关

于 $M_i^B(i=1,2,3)$ 的独立线性方程组:

$$\begin{cases} K_{I r 0}^B=\sigma_0 \sqrt{\pi a} F_{r 0}^B=\int_{-a}^a \frac{\sigma_0}{\sqrt{\pi(a+x)}}\left[M_1^B\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1 / 2}\left(1+\frac{x}{a}\right)+M_2^B\left(1-\frac{x}{a}\right)^{3 / 2}+M_3^B\left(1+\frac{x}{a}\right)^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1 / 2}\right] \mathrm{d} x \\ K_{I r 1}^B=\sigma_0 \sqrt{\pi a} F_{r 1}^B=\int_{-a}^a \frac{\sigma_0(1-x / a)}{\sqrt{\pi(a+x)}} \cdot \frac{a}{a_A}\left[M_1^B\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1 / 2}\left(1+\frac{x}{a}\right)+M_2^B\left(1-\frac{x}{a}\right)^{3 / 2}+M_3^B\left(1+\frac{x}{a}\right)^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1 / 2}\right] \mathrm{d} x \\ K_{I r 2}^B=\sigma_0 \sqrt{\pi a} F_{r 2}^B=\int_{-a}^a \frac{\sigma_0(1-x / a)^2}{\sqrt{\pi(a+x)}}\left(\frac{a}{a_A}\right)^2\left[M_1^B\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1 / 2}\left(1+\frac{x}{a}\right)+M_2^B\left(1-\frac{x}{a}\right)^{3 / 2}+M_3^B\left(1+\frac{x}{a}\right)^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1 / 2}\right] \mathrm{d} x \end{cases} \quad(11)$$

积分后得到

$$\begin{cases} \frac{1}{2} M_1^B+\frac{3}{2} M_2^B+\frac{1}{2} M_3^B=F_{r 0}^B \\ \frac{a}{a_A}\left(\frac{1}{2} M_1^B+\frac{5}{2} M_2^B+\frac{3}{8} M_3^B\right)=F_{r 1}^B \\ \left(\frac{a}{a_A}\right)^2\left(\frac{5}{8} M_1^B+\frac{35}{8} M_2^B+\frac{3}{8} M_3^B\right)=F_{r 2}^B \end{cases} \quad(12)$$

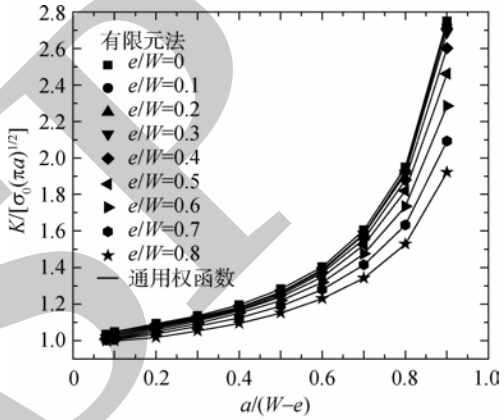
首先采用二元拉格朗日插值法获得 3 组参考载荷下任意裂纹长度 a 与偏心距 e 对应的参考应力强度因子(采用 $F_{r i}^B(i=1,2,3)$ 表示),然后通过式(10)计算得到通用权函数的系数 $M_i^B(i=1,2,3)$,即可得到任意偏心穿透裂纹尺寸下的通用权函数。最后将复杂应力分布 $\sigma(x)$ 和通用权函数代入式(5)进行数值积分便可计算得到任意复杂载荷与任意裂纹尺寸下裂纹前缘 B 的应力强度因子。

3 通用权函数的验证

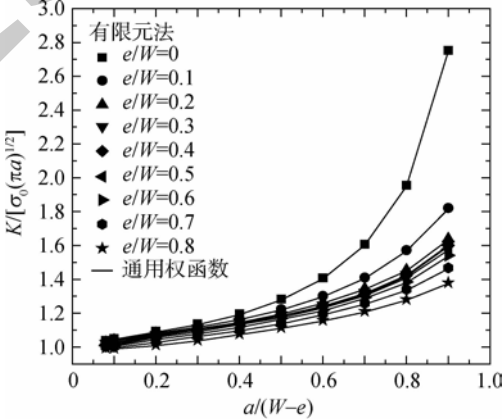
3.1 自治性验证

为了验证矩形板偏心穿透裂纹前缘点 A 与前缘点 B 的通用权函数,首先进行了自治性验证,即对比参考载荷下的应力强度因子通用权函数法计算结果和有限元法计算结果,如图 5 所示。

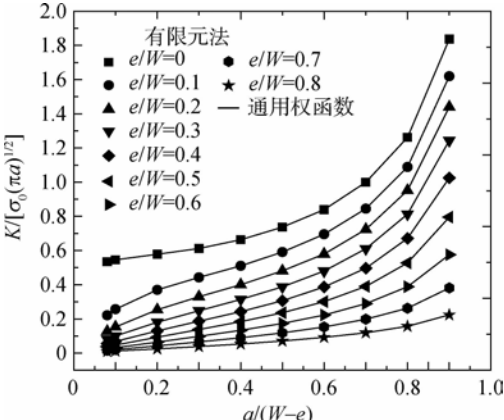
从图 5 可以看出,尺寸配置为 $a/(W-e)=0.08,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9$; $e/W=0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8$ 的裂纹应力强度因子有限元法计算结果与通用权函数法计算结果吻合得很好。对于裂纹前缘点 A ,通用权函数相对于有限元法的误差小于 0.5%;对于裂纹前缘点 B ,通用权函数相对于有限元法的误差小于 0.9%;对于 Kiciak 等人^[16]采用参考应力强度因子拟合表达式获得的通用权函数而言,其自治性验证时,相对于有限元法的误差达到 10%。说明本文提出并采用二元拉格朗日插值法



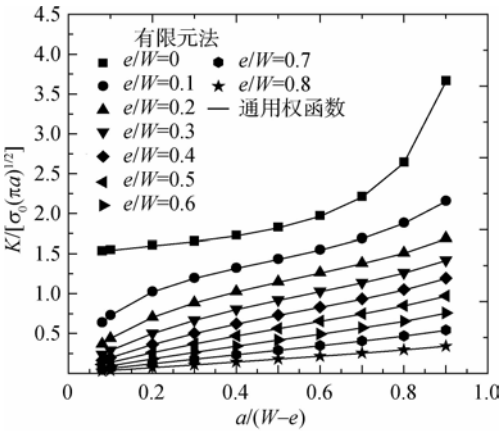
(a) 均布应力, 裂纹前缘点A



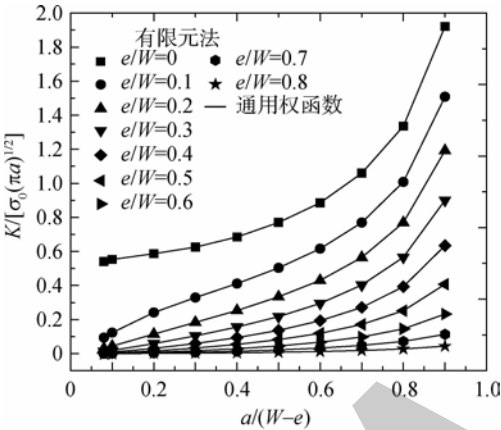
(b) 均布应力, 裂纹前缘点B



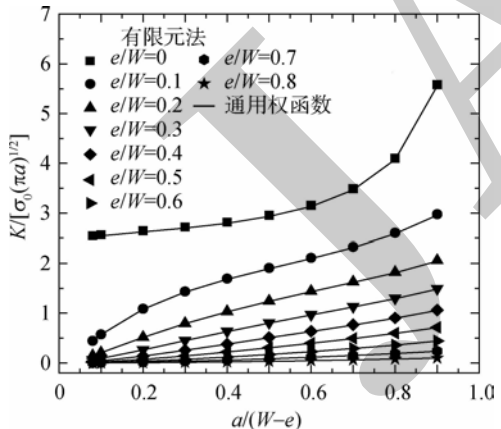
(c) 线性分布应力, 裂纹前缘点A



(d) 线性分布应力, 裂纹前缘点B



(e) 二次分布应力, 裂纹前缘点A



(f) 二次分布应力, 裂纹前缘点B

图 5 通用权函数自洽性验证

Fig. 5 Self-consistency validation of the general weight function

获得的通用权函数具有很高的自洽性。

3.2 幂函数应力分布载荷

对于工程中存在裂纹的结构,其裂纹面上的任意复杂非线性应力分布均可以采用 7 次或 7 次以下的幂函数应力分布表示^[7]。为了进一步验证本文通用权函数的适用性,首先,对比了不同尺寸配置下矩形板偏心穿透裂纹面分别承受简单 3

次、5 次、7 次幂函数和复杂幂函数应力分布载荷时的应力强度因子有限元计算结果和通用权函数计算结果。全局坐标系 xyz 下的简单幂函数应力分布载荷见式(13),复杂幂函数应力分布载荷见式(14),如图 6 所示。

$$\sigma_i(x) = \sigma_0 \left(1 - \frac{x}{a_A}\right)^i \quad i = 3, 5, 7 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(x)}{\sigma_0} = & 1 + 0.01 \left(1 + \frac{x}{20}\right) - 0.05 \left(1 + \frac{x}{20}\right)^2 + \\ & 0.02 \left(1 + \frac{x}{20}\right)^3 - 0.001 \left(1 + \frac{x}{20}\right)^4 + \\ & 0.001 \left(1 + \frac{x}{20}\right)^5 \end{aligned} \quad (14)$$

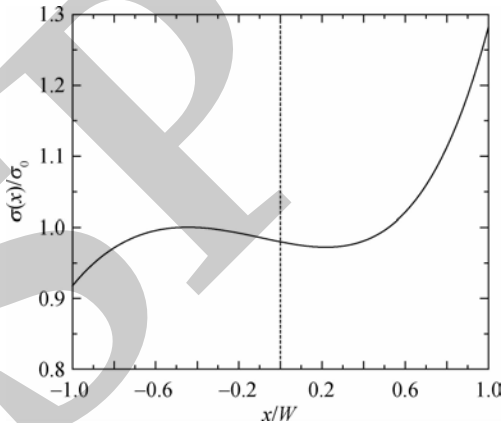
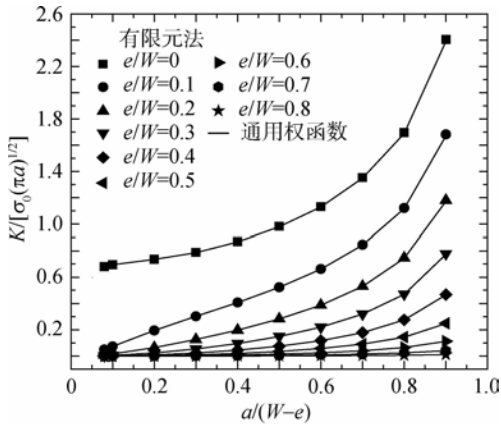


图 6 复杂幂函数应力分布示意图

Fig. 6 Sketch of complex power law stress distribution

简单幂函数分布载荷下的应力强度因子对比结果如图 7~图 10,可以看出通用权函数法计算结果与有限元法计算结果吻合得很好。对于裂纹前缘点 A 和裂纹前缘点 B,两种方法计算结果的最大相对误差见表 2。结果表明,对于前缘点 A 和前缘点 B,在矩形板偏心穿透裂纹尺寸位于 $0.08 \leq a/(W-e) \leq 0.9$, $0 \leq e/W \leq 0.8$ 范围内时,本文所提出的通用权函数法的误差在 4.5%



(a) 裂纹前缘点A

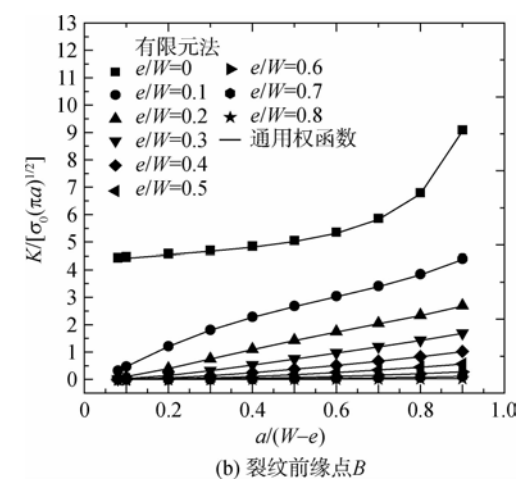


图 7 3 次幂函数应力分布下应力强度因子对比结果
Fig. 7 Comparison of stress intensity factors for a third-order power law stress distribution

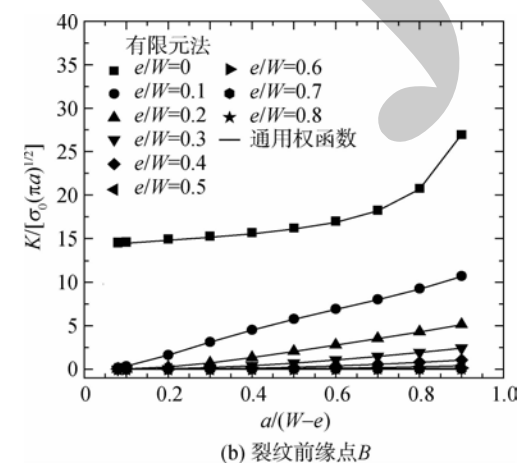
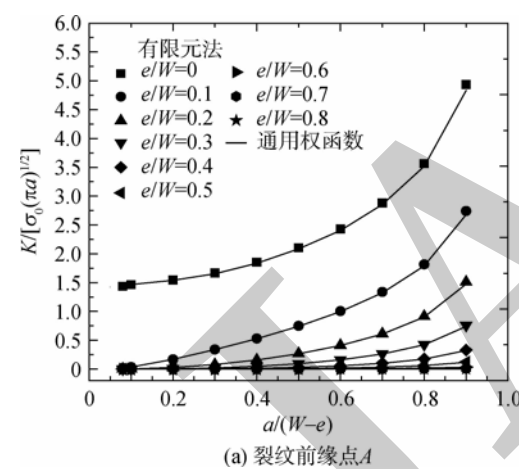


图 8 5 次幂函数应力分布下应力强度因子对比结果
Fig. 8 Comparison of stress intensity factors for a fifth-order power law stress distribution

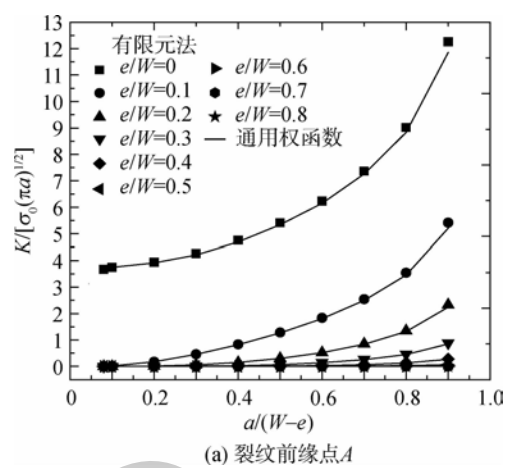
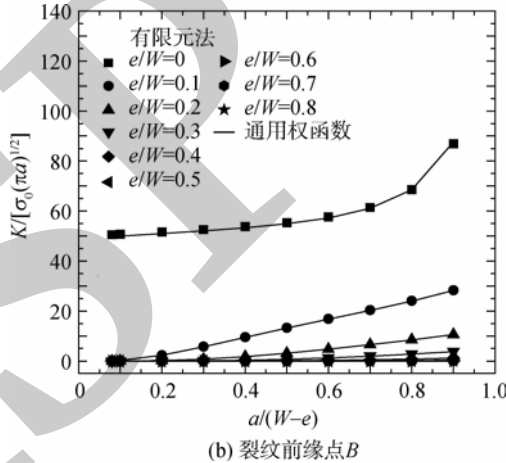


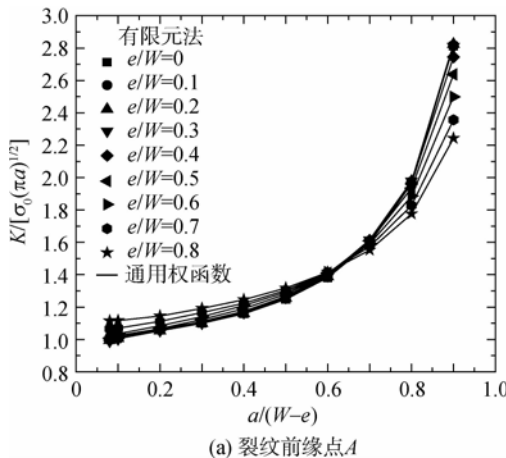
图 9 7 次幂函数应力分布下应力强度因子对比结果
Fig. 9 Comparison of stress intensity factors for a seventh-order power law stress distribution



以内。说明该通用权函数具有较高的计算精度。

3.3 残余应力分布载荷

为了进一步验证通用权函数的准确性,本文采用 Chen 和 Albrecht^[19]所得到的残余应力场(见式(15),如图11)对通用权函数的计算精度进



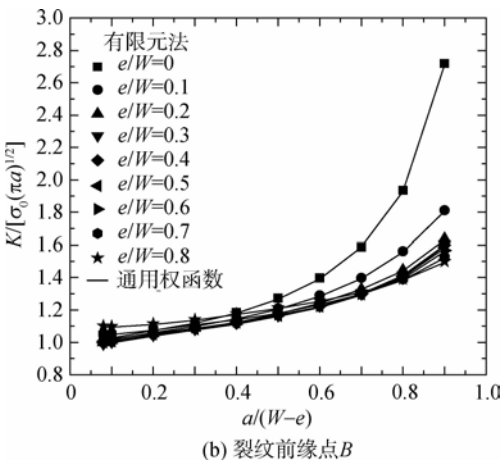


图 10 复杂幂函数应力分布下应力强度因子对比结果
Fig. 10 Comparison of stress intensity factors for a complex power law stress distribution

表 2 通用权函数结果与有限元法结果的
最大相对误差

Table 2 Maximum relative differences between
general weight function results and
finite element method results

最大相对 误差	幂函数			复杂 幂函数
	3 次	5 次	7 次	
$\delta_{A,max}/\%$	0.72	2.61	4.28	0.44
$\delta_{B,max}/\%$	0.98	1.40	1.38	0.71

行验证。其中系数 c 为残余应力形状因子,本文取 c 为 0.4。在偏心距 $e/W=0,0.1,0.2,0.3$ 且裂纹尺寸在 $0.08 \leq a/(W-e) \leq 0.9$ 范围内时,残余应力分布载荷下两种方法的应力强度因子计算结果如图 12 所示。

$$\frac{\sigma(x)}{\sigma_0} = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{W_c}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{x}{W_c}\right)^2\right] - \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}\right)^2\right] \quad (15)$$

从图 12 可以看出,通用权函数法的计算结果几乎与所有有限元计算结果数据点完全重合。只有当 $e/W=0.3$ 时,裂纹尺寸在 $0.3 < a/(W-e) \leq 0.9$ 范围内两种方法的计算结果相差明显较大。因为残余应力场中存在残余压应力,进一步分析裂纹面张开位移(如图 13)发现:当 $e/W=0.3$, $0.3 < a/(W-e) \leq 0.9$ 时,裂纹前缘点 A 处的裂纹面发生闭合。结果发现,对于裂纹面张开的裂纹前缘,通用权函数法计算结果与有限元计算结果的相对误差不超过 8.5%,说明本文所得到偏

心穿透裂纹的通用权函数在计算残余应力分布载荷下的应力强度因子时具有较高的精度。

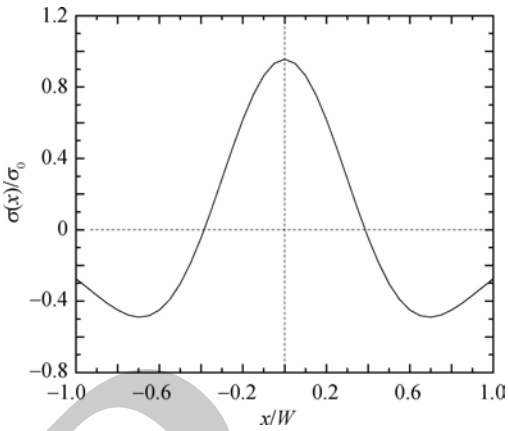


图 11 总体坐标系下的残余应力分布
Fig. 11 Residual stress distribution in global coordinate system

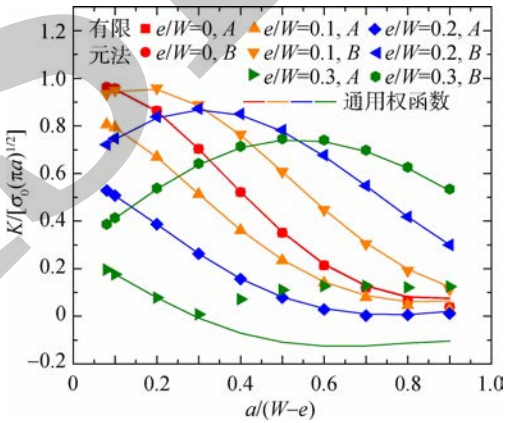
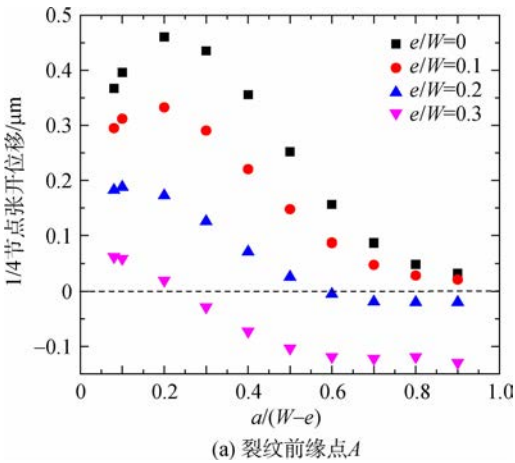


图 12 残余应力分布下应力强度因子对比结果
Fig. 12 Comparison of stress intensity factors for residual stress distribution



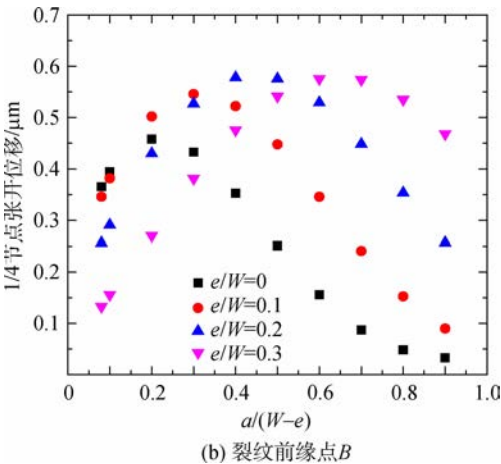


图 13 残余应力分布下裂纹前缘 1/4 节点张开位移
Fig. 13 Opening displacement at crack front 1/4 nodes for residual stress distribution

4 结 论

本文提出了三维矩形平板内偏心穿透裂纹的、仅含有 3 个未知系数的通用权函数,采用有限元法获得了 3 组三维矩形板裂纹体模型下的参考应力强度因子,结合二元拉格朗日插值法获得了通用权函数未知系数。最后分别进行了自洽性验证以及裂纹面上承受简单 3 次、5 次、7 次幂函数和复杂幂函数应力分布以及残余应力分布下的通用权函数法的验证。得到结论如下:

1) 二维矩形板偏心穿透裂纹的应力强度因子有限元结果与三维矩形板偏心穿透裂纹相对误差达到 6.5%,应建立三维裂纹模型计算通用权函数的应力强度因子参考解。

2) 采用参考应力强度因子数据结合二元拉格朗日插值法获得了通用权函数未知系数,而非采用参考应力强度因子拟合表达式。结果表明该通用权函数具有更好的自洽性。

3) 裂纹面上承受简单 3 次、5 次、7 次幂函数和复杂幂函数应力分布时,通用权函数法的误差在 4.5%以内;裂纹面承受残余应力分布载荷时,通用权函数法的误差在 8.5%以内。

综上说明,本文所得到的矩形平板内偏心穿透裂纹的通用权函数具有较高的计算精度,可以满足工程中高效、准确地计算应力强度因子的需求。

参考文献:

[1] TADA H, PARIS P, IRWIN G. The stress analysis of

cracks handbook[M]. St. Louis, Missouri, US: Paris Production Incorporation, 1985.

[2] MURAKAMI Y, HASEBE M T, IFOH K, et al. Stress intensity factors handbook [M]. Oxford, UK: Pergamon Press, 1992.

[3] 贾旭,胡绪腾,宋迎东. 基于三维裂纹尖端应力场的应力强度因子计算方法[J]. 航空动力学报, 2016, 31(6): 1417-1426.

JIA Xu, HU Xuteng, SONG Yingdong. Calculation method of stress intensity factor based on the three-dimensional stress field at the crack tip[J]. Journal of Aerospace Power, 2016, 31(6): 1417-1426. (in Chinese)

[4] BUECKNER H F. A novel principle for the computation of stress intensity factors[J]. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik, 1970, 50(9): 529-546.

[5] RICE J. Some remarks on elastic crack-tip stress field[J]. International Journal of Solids and Structures, 1972, 8(6): 751-758.

[6] MCCLUNG R C, LEE Y D, LIANG W, et al. Automated fatigue crack growth analysis of components[J]. Procedia Engineering, 2010, 2(1): 629-637.

[7] Southwest Research Institute. DARWIN² theory[R]. San Antonio, US: Southwest Research Institute, Design Assessment of Reliability with Inspection, 2008.

[8] NEWMAN J C, Jr., RAJU I S. Stress-intensity factor equations for cracks in three-dimensional finite bodies subjected to tension and bending loads [R]. NASA TM-85793, 1986.

[9] 贾旭,胡绪腾,宋迎东,等. 三维矩形板 1/4 椭圆角裂纹的通用权函数[J]. 航空动力学报, 2015, 30(10): 2357-2367.

JIA Xu, HU Xuteng, SONG Yingdong, et al. General weight functions for corner quarter-elliptical crack in three-dimensional rectangular plate[J]. Journal of Aerospace Power, 2015, 30(10): 2357-2367. (in Chinese)

[10] WU X R, CARLSSON A J. Weight functions and stress intensity factor solutions[M]. New York: Pergamon Press, 1991.

[11] NEWMAN J C, YAMADA Y, JAMES M A. Stress-intensity-factor equations for compact specimen subjected to concentrated forces[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2010, 77(6): 1025-1029.

[12] PETROSKI H Y, ACHENBACH F D. Computation of the weight function from a stress intensity factor[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1978, 10(2): 257-266.

[13] GLINKA G, SHEN G. Universal features of weight functions for cracks in mode I [J]. Engineering Fracture Mechanics, 1991, 40(6): 1135-1146.

[14] JAKUBCZAK H, GLINKA G. Calculation of stress intensity factors for cracks subjected to arbitrary non-linear stress fields[J]. European Structural Integrity Society, 1999, 25(3): 261-274.

[15] 贾旭,胡绪腾,宋迎东. 两种求解应力强度因子权函数方法的对比分析[J]. 机械设计与制造, 2014(9): 7-10.

JIA Xu, HU Xuteng, SONG Yingdong. Comparative analysis of two kinds of weight function methods for solving the stress intensity factors[J]. Machinery Design and Manufacture, 2014(9): 7-10. (in Chinese)

[16] KICIAK A, GLINKA G, EMAN M. Weight functions for corner crack in finite thickness plate subjected to in-plane loading[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1998, 60(2): 221-238.

[17] GLINKA G. Development of weight functions and computer integration procedures for calculating stress intensity factors around cracks subjected to complex stress fields [R]. Hamoton, US: Stress and Fatigue-Fracture Design Inc. ,1996.

[18] SHEN G, GLINKA G. Weight functions for a surface semi-elliptical crack in a finite thickness plate[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1991, 15(3): 247-255.

[19] CHEN X, ALBRECHT P. Weight functions for eccentric cracks[M]// LANDES J, MCCABE D, BOULET J. Fracture Mechanics. West Conshohocken, US: ASTM International, 1994: 581-581.

(编辑:陈 越)